2-8 апталардағы негізгі ұғымдар

Сан қатарлары. Жалпы қасиеттері. Салыстыру Даламбер, Коши Лейбниц , интегралдық белгілері. Абсолютті шартты жинақтылық жинақтылық.

Айталық, $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ сандар тізбегі берілген дейік Осылар арқылы мынадай, қосынды құрайық:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots.$$

Осы, мүшелерінің саны шексіз болатын қосындыны сан қатары деп атайды. Символды түрде қатарды былай белгілейді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

Енді мынадай қосындылыр құрамыз:

$S_1=u_1$

$S_2=u_1+u_2$

....

$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

Бұларды қатардың дербес қосындылары дейді.

Анықтама. Егер S_n дербес қосындылары тізбегі жинақты болса (*) қатарын жинақты қатар деп аталады және қатардың қосындысы S_n тізбегінің шегіне тең болады.

Сонымен егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S,$ тежеулі шегі бар болса (1) қатар жинақты, ал шексіз қосылғыштардың қосындысы S санына тең.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі жоқ немесе шексіздікке теі болса қатар жинақсыз.

Мысалы. Еселігі $/q/<1$ болған шексіз геометриялық прогрессияны қарастырайық

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

S_n дербес қосындысы тең болады

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

Енді $n\to\infty$ шекке көшеміз

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}-\lim\frac{aq^n}{1-q}=$$

$=\frac{a}{1-q}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}; \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}=0$ себебі $|q|\prec 1$ Сонда шексіз геометриялық прогрессия қосындысы тең болады $S=\frac{a}{1-q}$

Сандық қатарлардың қасиеттерін көрсететін теоремаларды келтірейік.

Теорема 1. Егерде $u_1+u_2+u_3+\ldots$ қатары жинақты болса,онда $u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\ldots$ қатары да жинақты болады, берілген қатардың m мүшесін алып тастаған, ал керісінше , $u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\ldots$ қатары жинақты болса, берілген қатарда жинақты болады

Теорема 2. Егер $u_1+u_2+u_3+\ldots$ қатары жинақты болса және қосындысы S тең болса, онда $au_1+au_2+au_3+\ldots$ қатарыда жинақты болады оның қосындысы $a\cdot s$ - ға тең.

Теорема 3. Егерде $u_1+u_2+u_3+\ldots$ *және* $v_1+v_2+v_3+\ldots$ қатарлары жинақты болып қосындылары S және σ Тең болса, онда $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots$

қатарыда жинақты болады, оның қосындысы тең $S+\sigma$

Теорема 4. Егерде $u_1+u_2+u_3+\ldots$ қатары жинақты болса, онда қатардың жалпы мүшесі u_n нөлге үмтылады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ (қатардың жинақты болуының қажетті шарты).

Сонымен $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$ - болса қатар тіптен жинақсыз болады.

Егер $u_{n\geq 0}$ болса (*) қатары оң қатар деп аталады. Енді оң қатарлар жинақтылығына байланысты салыстыру теоремалары мен белгілерін келтірейік.
Теорема 5. Егерде берілген екі қатардың

$$u_1+u_2+u_3+...u_n+... \qquad (1)$$
$$v_1+v_2+v_3+...+v_n+... \qquad (2)$$

сәйкес мүшелері үшін $u_n \leq v_n$ $(n=1, 2, 3, ...)$ теңсіздіктерін қанағаттандырса, онда (2) қатар жинақты болғанда (1) қатар да жинақты болады, ал (1) қатар жинақсыз болса (2) қатар да жинақсыз болады.
Теорема 6. (Коши белгісі).
Егерде $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ қатардың соңғы мүшесінің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ -ге тең болса, онда:

1) $\ell \prec 1$ болғанда қатар жинақты болады,
2) $\ell \succ 1$ болғанда қатар жинақсыз болады
3) $\ell = 1$ болғанда қатар жинақтыма немесе жинақсыз ба Коши белгісі жауап бермейді.
4)

Теорема 7 (Даламбер белгісі)
Егерде келесі шеек $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, бар болса онда
$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ қатары :
1) $\ell \prec 1$ болғанда қатар жинақты болады,
2) $\ell \succ 1$ болғанда қатар жинақсыз болады
3) $\ell = 1$ болғанда Даламбер әдісі, қатар жинақтыма немесе жинақсыз ба жауап бермейді.
Енді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (3)$$

болсын.
Теорема 8. (Интегралдық әдіс).
Егер $x \geq 1$ мәндері үшін $f(x)$ функциясы үзіліссіз, оң және бірсарынды кемімелі болса, онда $\int\limits_N^{\infty} f(x)dx, \quad (N \geq 1)$ меншіксіз интегралы жинақты болса (3) қатар да жинақты болады.
.
Енді, мүшелерінің таңбасы кезекпен кезек ауысып келген қатарды қарастырайық

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...,$$

мұнда $u_n \succ 0 \quad (n = 1,2,3,...)$.
Теорема 9. (Лейбниц белгісі).
Егерде, таңбалары кезекпен ауысып келген қатардың, мүшелерінің абсолют шамасымен алынған мүшелері бірсарынды кемімелі және жалпы мүшесі нолге ұмтылса, яғни келесі екі шарт орындалса

1) $u_1 \succ u_2 \succ u_3 ...$
1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

қатар жинақты болады.
Мүшелерінің таңбалары әр түрлі болған қатарды қарастырайық

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (4)$$

(1)-ші қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасы бойынша алынған қатарды алайық

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ... \qquad (5)$$

Егерде (5)-ші қатар жинақты болса, онда (4)-ші қатар да жинақты болады. Мұндай жағдайда (4)-қатар абсолютті жинақты деп аталады.
Егерде (4)-ші қатар жинақты болса, ал (5)-ші қатар жинақсыз болса, онда (4)-ші қатарды шарты жинақты қатар дейміз.

Айталық, (4) қатар абсолютті жинақты, онда (4) қатардың мүшелерінің орындарын шексіз көп алмастырудан шыққан қатарда жинақты және ол қатардың қосындысы (4) қатардың қосындысына тең болады.
Ал, қатар шарты жинақты болса, оның мүшелерінің орнын алмастыру арқылы құралған қатар жинақсыз болуы мүмкін.

Келесі қатардың S_n дербес қосындысын және қосындысы S Табыңдар .
Мысал.1.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$$

шешу. Қатарды келесі түрде жазамыз

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=$$

$$\frac{1}{2}\left[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+...+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\right],$$

енді квадрат жақшаның ішіндегі жай жақшаны ашсақ, онда бірінші және соңғы мүше қалады, қалғандары қысқарып кетеді, сонда:

$$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\leftarrow\infty}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

себебі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

Мысал.2

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+3)}+...,$$

қатардың қосындысын тап.
Қатардың жалпы мүшесін қарастырайық

$$U_n=\frac{1}{n(n+3)}$$

Оны жәй бөлшектердің қосындысы ретінде жазамыз

$$U_n=\frac{1}{n(n+3)}=\frac{\overline{n+3}\,A}{n}+\frac{\overline{n}\,B}{n+3};\quad 1=An+3A+Bn$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ 3A=1\end{cases}\qquad A=\frac{1}{3},\qquad B=-\frac{1}{3}$$

Сонда қатардың жалпы мүшесін келесі түрде жазамыз.

$U_n=\frac{1}{3n}-\frac{1}{3(n+3)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$ енді қатардың мүшелерін табамыз.

$$U_1=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4}),\qquad U_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}),\qquad U_3=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})$$

$$U_4=\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}),\quad U_5=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}),...$$

Қатардың n - дербес қосындысы тең болады

$$S_n = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}) + ... +$$

$$+\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}) = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+...+$$

$$+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}) = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}) = \frac{11}{18}$$

$$S = \frac{11}{18}$$

Мысал3

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + ...$$

қатардың қосындысын тап.

Әуелі, қатардың жалпы мүшесін, жәй бөлшектердің қосындысы ретінде жазамыз.

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)\,(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} =$$

$$= \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + C\cdot n(n+1)}{n(n+1)\,(n+2)}$$

$$1 = A(n+1)\,(n+2) + B\,n\cdot(n+2) + C\cdot n(n+1)$$

Енді, $n = 0, -1, -2$ тең деп алып A,B,C анықталмаған сандарды табамыз: егерде

$$n = 0;\quad 1 = 2A;\quad a = \frac{1}{2}$$

$$n = -1;\quad 1 = -B;\quad B = -1$$

$$n = -2;\quad 1 = 2C;\quad C = \frac{1}{2}$$

Қатардың жалпы мүшесін келесі түрде жазамыз

$$U_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \quad \text{немесе}$$

$$U_n = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2\,(n+2)})$$

Қатардың жеке мүшелерін жазамыз

$$U_1 = \frac{1}{2}(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}),$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}),$$

$$U_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}),$$

$$U_4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}),$$

....

$$U_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})$$

Сонда, қатардың n жеке мүшесінің қосындысы тең болады

$$S_n = \frac{1}{2}[(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}) +$$

$$+(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6})]=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+$$
$$+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})=$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$$
Енді шеек табамыз
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})=\frac{1}{4}$$
яғни, қатар жинақты $S=\frac{1}{4}$.
Мысал.4
$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+...,$$
қатардың қосындысын тап.
Қатардың жалпы мүшесін жәй бөлшектердің қосындысы ретінде жазамыз.
$$U_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n^2}+\frac{B}{n}+\frac{C}{(n+1)^2}+\frac{D}{n+1}$$
Ортақ бөлімге келтіреміз, сонда
$$2n+1=A(n+1)^2+Bn(n+1)^2+Cn^2+Dn^2(n+1)^2$$
Енді, $n=0, \quad n=-1$ тең болғанда $A, B. C, D$ сандарын табамыз.
Айталық, $n=0, \quad n=-1; \quad 1=A, \quad A=1; \quad B=0$
$-1=C; \quad C=-1; \quad D=0$
$$U_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
Қатардың бірнеше мүшелерін тауып, *n*- мүшесінің қосындысын табамыз, яғни
$$U_1=1-\frac{1}{4}; \quad U_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}; \quad U_3=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}; \quad U_4=\frac{1}{16}-\frac{1}{25};$$
$$..., U_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$S_n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{16})+(\frac{1}{16}-\frac{1}{25})+...$$
$$+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{(n+1)^2})=1; \quad S=1,$$
қатар жинақты.
Мысал 5. Берілген
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+...$$
қатар үшін, қатардың жинақты болу қажетті шарты орындала ма?
Шешуі. Ол үшін қатардың жалпы мүшесін табамыз.
$$U_n=\frac{2n-1}{2n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1$$
$\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0,$ сондықтан қажетті шарты орындалмайды , ендеше қатар жинақсыз..
Мысал 6.

$0{,}6+0{,}5+0{,}501+...[0{,}5+(0{,}1)^n]+...$

қатар үшін, қатардың жинақты болуының қажетті шарты орындала ма?

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} [0{,}5+(0{,}1)^n]=0{,}5$

себебі $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}1)^n = 0,$ сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ орындалмайды.

Қатардың жинақты болуын интегралдық әдіс арқылы тексер.

Мысал7.

$$\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+...$$

Қатардың жалпы мүшесі ретінде, келесі функцияны аламыз.

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ Сонда x= 1, 2, … мәндерінде функция берілген қатар мүшелерін береді.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_1^\infty = arctg\infty - arctg1 =$$

$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},$ жинақты.

Мысал 8

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+...$$

Жалпы мүшесі ретінде $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2-1}$ функциясын аламыз, сонда

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2-1}=[\frac{1}{4}Ln\left|\frac{x}{x+1}\right|]\Big|_1^\infty = \frac{1}{4}Ln\,2 \text{ жинақты.}$$

Мысал 9. .

$$\frac{1}{2Ln2}+\frac{1}{3Ln3}+\frac{1}{4Ln4}+...$$

жалпы мүшесі $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)Ln(x+1)}$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)Ln(x+1)}=\int_1^\infty \frac{d(Ln(x+1))}{Ln(x+1)}=Ln(Ln(x+1))\Big|_1^\infty=\infty$$

жинақсыз.

Қатардың жинақты болуын Даламбер белгісі арқылы тексер.

Мысал 10.

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{(2n+1)!}+...$$

$$U_n=\frac{1}{(2n+1)!},\quad U_{n+1}=\frac{1}{(2n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0 \text{ жинақты.}$$

Мысал 11.

$$1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+...+\frac{n!}{(2n-1)!}+...$$

$$U_n\,\frac{n!}{(2n-1)!},\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\,n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\prec 1,$$

жинақты.

Мысал 12.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$$U_n=\frac{1}{n^2},\quad U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}=1$$

Даламбер белгісі қатар жинақты ма немесе жинақсыз ба жауап бермейді, сондықтан интегралдық әдісті қолданамыз, ол үшін функцияны $f(x)=\frac{1}{x^2}$ деп аламыз.

$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^\infty=1$ интеграл жинақты, сондықтан берілген қатарда жинақты болады.

Мысал 13

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$$

$$U_n=\frac{n^2}{3^n};\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{3^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3},$ жинақты

Мысал 14.

$$\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)\ !}{2^n\cdot n!}+\ldots$$

$$U_n=\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!};\quad U_{n+1}=\frac{(n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

$$\lim\frac{(n+2)!\quad 2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\quad (n+1)!}=\lim\frac{n+2}{2\,(n+1)}=\frac{1}{2}\prec 1,$$

жинақты.

Қатардың жинақты болуын Коши әдісі арқылы тексер.

Мысал 15

$$\frac{1}{3}+(\frac{2}{5})^2+(\frac{3}{7})^2+\ldots+(\frac{n}{2n+1})^n+\ldots$$

$$\sqrt[n]{U_n}=\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n}=\frac{n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\prec 1$$

жинақты.

Мысал 16

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,(1+\frac{1}{n})n^2$$

$$U_n=\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})n^2,\qquad \sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{2}\ell\succ 1$$

жинақсыз.

Мысал17

$$\frac{2}{3}+\frac{(\frac{3}{2})^4}{9}+\ldots+\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}+\ldots$$

$$U_n=\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n};\qquad \sqrt[n]{U_n}=\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{3}\cdot\ell$$

$$\frac{1}{3}\ell\prec 1$$

қатар жинақты.

Қатардың жинақты болуын Лейбниц белгісі арқылы тексер.

Мысал 18.

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots+(-1)^n\frac{n}{n^2+1}+\ldots$$

Берілген қатарға Лейбниц теоремасын қолданамыз

1) $\frac{1}{2}\succ\frac{2}{2^2+1}\succ\frac{3}{3^2+1}\succ\frac{4}{4^2+1}\succ\ldots,$

бірінші шарт орындалады.

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$$

екінші шартта орындалады, сондықтан қатар жинақты болады.

Мысал 19.

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-\ldots+(-1)^{n-1}[1+(0{,}1)^n]+\ldots$$

берілген қатарды зертте.

Лейбниц теоремасының бірінші шарты орындалады.

$$1{,}1\succ 1{,}01\succ 1{,}001\succ\ldots$$

ал, екінші шарты орындалмайды.

$$U_n=1+\frac{1}{10^n},\quad \lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10^n})=1,$$

себебі $\lim_{n\to\infty}U_n\neq 0$

Мысал 20.

$$1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$$

Қатардың жалпы мүшесі нолге ұмтылмайды, қатар жинақсыз.

Мысал 21.

$$1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots$$

Лейбниц белгісі бойынша қатар жинақты, себебі:

$$1 \succ \frac{1}{\sqrt{3}} \succ \frac{1}{\sqrt{5}} \succ \frac{1}{\sqrt{7}} \succ \ldots$$

бірінші шарты орындалады.

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}, \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$$

екінші шартта орындалады.

Енді мүшелерінің абсолюттік шамасымен алынған қатарды қарастырайық:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \ldots$$

Бұл қатардың сәйкес мүшелері гармоникалық қатардың

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

сәйкес мүшелерінен үлкен, ал, гармондық қатар жинақсыз, сондықтан салыстыру теоремасы негізінде берілген қатар да жинақсыз болады. яЯғни қатар шартты жинақты болады.

Мысал 21.

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots + (-1)^{n-1}(\frac{1}{n^3}) + \ldots$$

берілген қатарды зертте.

Лейбниц Теоремасы бойынша қатар жинақты, себебі:

$$1 \succ \frac{1}{2^3} \succ \frac{1}{3^3} \succ \frac{1}{4^3} \succ \ldots,$$

бірінші шарт орындалады.

$$U_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

екінші шартта орындалады. Айталық, мүшелерінің абсолюттік шамасымен алынған қатарды қарастырайық.

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

Бұл қатардың жалпы мүшесі

$U_n = \frac{1}{n^3}$, енді $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $[1; \infty]$ – деп алып интегралдық әдісті қолданайық

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^\infty = \lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$ қатар абсолютті жинақты.

Жаттығулар. Келесі қатарларды зерттеңдер.

1) $1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \ldots$

Жауабы: жинақты

2) $1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \frac{1}{100n-99} + \ldots$

Жауабы: жинақсыз.

3) $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \ldots$

Жауабы: $\frac{\pi}{8}$ жинақты

4) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+...$

Жауабы: жинақсыз.

5) $1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{3n-2}+...$

Жауабы: жинақты

6) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+...$

Жауабы: жинақты

7) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+...+\frac{10^n}{2n+5}+...$

Жауабы: жинақсыз.

8) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{2^n}{n!}+...$

Жауабы: жинақты

9) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+...$

Жауабы: жинақты

10) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$

Жауабы: шартты жинақты

11) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}+...$

Жауабы: абсолютті жинақты.

6-дәрістік сабақ. Дәрежелік қатар. Тейлор қатары. Фурьенің тригонометриялық қатары.

Енді мүшелері функциялар болатын қатарларды қарастырамыз.

Анықтама .

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

түріндегі қатарды дәрежелік қатар деп атайды. Бұл дәрежелік қатардың жалпылама түрі.

Біз мынадай түрдегі дәрежелік қатарды қарастырамыз:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2)$$

себебі x-a= t десек (1) қатары (2) түріне келеді.

x-тің белгіленген мәнінде (2) қатар сан қатарына айналады. (2) қатар сан қатар жинақты болатын x-тың барлық мәндері қатардың жинақтылық облысын құрады. Егер дәрежелік қатар жинақты болса оның қосындысы жинақтылық облысында анықталған функция болады

Теорема. Егер (2) дәрежелік қатары жинақты болса оның жинақтылық облысы (-R , R) түріндегі болады.

(-R , R) - интервалы (2) дәрежелік қатарының жинақтылық интервалы, ал R саны жинақтылық радиусы деп аталады. Дәрежелік қатар жинақтылық интервалының ішінде абсолютты жинақты болады.

Даламбер белгісін

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x^2| + \ldots + |a_n|\,|x^n| + \ldots \qquad (3)$$

қатарына қолданып жинақтылық радиусын табатын формула аламыз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (4)$$

(2) дәрежелік қатары интервалында жинақты болсын. Оның қосындысын f(x) деп белгілейік. Сонда осы функцияның дифференциалданатындығын, интегралданатындығын дәлелдеуге болады, сонымен бірге:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad \text{болса}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$\int f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1x^2}{2} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

орындалады, яғни дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға, интегралдауға болады.

Мына қатарды

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (5)$$

f(x) функциясының (x-a) дәрежесі бойынша жазылған Тейлор қатары деп атайды. Ал мына қатарды

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (6)$$

f(x) функциясының x дәрежесі бойынша жазылған Тейлор қатары деп атайды.

(5) және (6) қатарларының қосындылары жинақтылық интервалының ішінде f(x) функциясын береді. Яғни $\forall\ x\in(-R, R)$ үшін

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (7)$$

орындалады. Бұл формула f(x) функциясының Тейлор қатарына жіктелуі деп аталады.

Кейбір элементар функцияларының Тейлор қатарына жіктелуін келтірейік:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x\in(-\infty, \infty)$

2) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots \qquad x\in(-\infty, \infty)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \ldots \qquad x\in(-\infty, \infty)$

4) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$

$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(m-1)]}{n!}x^n + \ldots \qquad x\in(-1, 1)$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x\in(-1, 1).$

Элементар функцияларының Тейлор қатарына жіктелуін функция мәндерін немесе өрнектерді жуықтап есептеуде қолданады.

Мысалы $\sqrt[3]{9}$ түбірін есептеу керек дейік. Бұл өрнекті мына түрде жазайық:

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

Енді 4) формуласында m=$\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{8}$ деп алсақ

$$\sqrt[3]{9}=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+...\right]=$$

$$2\left(1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}+\frac{5}{41472}-...\right)\approx 2{,}0802$$

f(x) функциясы (-l , l) интервалында анықталған үзіліссіз дейік , ал интервалдың шеткі нүктелерінде тежеулі біржақты шектері бар болсын.

Анықтама.. Мына қатарды :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

f(x) функциясының тригонометриялық Фурье қатары деп атайды, мұндағы a_n және $в_n$ дегендер Фурье коэффициенттері. Олар былай анықталады:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}f(x)dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}f(x)dx\ .$$